

物流码



QPG0001154

数学
第一轮专题
基础版
作业手册



责任编辑：翟善平
美术编辑：张帆
封面设计：唐思羽

ISBN 978-7-5717-0895-5



9 787571 708955

定价：79.80元（含“特色专项”）

印刷质检码20245780



绿色印刷产品

服务热线：4000-555-100

CONTENTS

目录

限时集训(一)	微专题 1 三角恒等变换与三角函数的图象和性质	091
限时集训(二)	微专题 2 平面向量	093
限时集训(三)	微专题 3 解三角形	095
提能特训(一)	三角函数与解三角形、平面向量	097
限时集训(四)	微专题 4 等差数列、等比数列	099
限时集训(五)	微专题 5 递推数列	101
限时集训(六)	微专题 6 数列求和	103
限时集训(七)	微专题 7 数列在问题情境中的应用	105
提能特训(二)	数列	107
限时集训(八)	微专题 8 简单几何体和球的表面积、体积、结构特征	109
限时集训(九)	微专题 9 点、线、面的位置关系	111
限时集训(十)	微专题 10 空间向量与立体几何	113
提能特训(三)	立体几何	115
限时集训(十一)	微专题 11 计数原理	117
限时集训(十二)	微专题 12 条件概率、全概率与贝叶斯公式	119
限时集训(十三)	微专题 13 事件与概率问题	121
限时集训(十四)	微专题 14 随机变量及其分布	123
限时集训(十五)	微专题 15 统计与成对数据的统计分析	125
提能特训(四)	概率与统计	128
限时集训(十六)	微专题 16 直线与圆	131
限时集训(十七)	微专题 17 圆锥曲线的方程与性质	133
限时集训(十八)	微专题 18 直线与圆锥曲线的位置关系	135
限时集训(十九)	微专题 19 圆锥曲线的综合问题	137
限时集训(二十)	微专题 20 函数的图象与性质	139
限时集训(二十一)	微专题 21 应用导数求解函数问题	141
限时集训(二十二)	微专题 22 应用导数求解零点问题	143
限时集训(二十三)	微专题 23 应用导数求解恒成立或有解问题	144

一、单项选择题

1. [2024·江苏南京二模] 为了得到函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象, 只要把函数 $y = \sin 2x$ 的图象上所有的点

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
- B. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- C. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
- D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

2. [2024·新课标I卷] 已知 $\cos(\alpha + \beta) = m, \tan \alpha \cdot \tan \beta = 2$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$

- A. $-3m$
- B. $-\frac{m}{3}$
- C. $\frac{m}{3}$
- D. $3m$

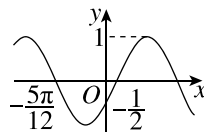
3. [2024·陕西安康模拟] 已知 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{8}) = \frac{2}{3}$, 则 $\cos(2\alpha - \frac{3\pi}{4}) =$

- A. $\frac{2}{3}$
- B. $-\frac{2}{3}$
- C. $\frac{1}{9}$
- D. $-\frac{1}{9}$

4. 已知函数 $f(x) = 2\cos x \cdot \cos(x - \frac{\pi}{3})$, 则 $f(x)$ 的图象

- A. 关于直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称
- B. 关于直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称
- C. 关于点 $(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2})$ 中心对称
- D. 关于点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 中心对称

5. [2024·四川成都模拟] 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x - \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则下列结论正确的是



- A. 当 $x \in (\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- B. $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增
- C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
- D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称

6. $\frac{\sin 80^\circ + \cos 50^\circ}{\sin 25^\circ} - \frac{\sqrt{6}}{2 \tan 25^\circ} =$

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. [2024·山东滨州二模] 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有 4 个零点, 直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴, 则 $f(\frac{\pi}{3}) =$ ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. [2024·浙江宁波模拟] 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 \omega x + \sin 2\omega x - 1$ ($\omega > 0$), 若 $f(x_1) = f(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($x_1 \neq x_2$), $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$, 则 $\omega =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1
C. 2 D. 3

二、多项选择题

9. [2024·山东青岛二模] 已知函数 $f(x) = \sin x \cdot |\cos x|$, 则 ()

- A. $f(x)$ 是奇函数
B. $f(x)$ 的最小正周期为 π
C. $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$
D. $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增

10. [2024·四川成都模拟] 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{5})$ ($\omega > 0$), 已知 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有 5 个零点, 则下列结论中正确的是 ()

- A. ω 的取值范围是 $[\frac{12}{5}, \frac{29}{10})$
B. $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有且仅有 3 个最高点
C. $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有且仅有 2 个最低点
D. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{10})$ 上单调递增

11. 已知 $f(x) = \cos \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \pi]$ 上是单调函数, 且 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\pi, 0)$ 中心对称, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $|f(x_1) - f(x_2)| = 4$, 则 $|x_1 - x_2|_{\min} = 6\pi$
B. $f(x)$ 的图象的一条对称轴为直线 $x = 2\pi$
C. 函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, 5\pi)$ 上无零点
D. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 π 个单位长度后得到的新图象对应的函数为偶函数

三、填空题

12. [2024·陕西商洛模拟] 若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$\cos(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}, \text{ 则 } \cos(\alpha - \frac{\pi}{12}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

13. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$), 将 $f(x)$ 的图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 纵坐标不变, 得到 $g(x)$ 的图象. 若 $g(x)$ 是偶函数, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恰有 2 个零点, 则 $\omega =$ _____.

14. 已知 α, β 均为锐角, 且满足 $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta} = 2\cos \alpha$, 则 $\alpha - \beta$ 的最大值为 _____.

一、单项选择题

1. [2023·哈尔滨模拟] 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}|=2, \mathbf{b}=(3,0), |\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{10}$, 则向量 \mathbf{a} 在向量 \mathbf{b} 方向上的投影向量为 ()

- A. $(\frac{1}{6}, 0)$ B. $(\frac{1}{3}, 0)$
C. $(\frac{1}{2}, 0)$ D. $(1, 0)$

2. 若 $|\mathbf{a}|=1, |\mathbf{b}|=2, (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, 则向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 ()

- A. 30° B. 60°
C. 120° D. 150°

3. [2024·江西新余二模] 已知 $\mathbf{a}=(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}), \mathbf{b}=(-\sqrt{3}, \lambda)$, 若 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 与 \mathbf{b} 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 则 $\lambda=$ ()

- A. -1 B. 1
C. ± 1 D. ± 2

4. [2024·江苏泰州模拟] 在平行四边形 $ABCD$ 中, $A=45^\circ, AB=1, AD=\sqrt{2}$, 若 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AD}(x \in \mathbf{R})$, 则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. 1 D. $\sqrt{2}$

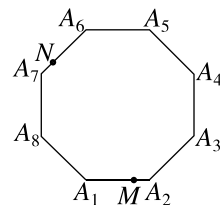
5. [2024·陕西安康模拟] 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle DAB=60^\circ$, 以 D 为圆心作圆, 圆 D 与 AB 相切于点 E , 圆 D 与 CD 相交于点 Q , 则 $\frac{\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AE}|} =$ ()

- A. $\sqrt{3}+1$ B. $\sqrt{3}-1$
C. $2\sqrt{3}+1$ D. $2\sqrt{3}-1$

6. [2024·沈阳三模] 已知非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}+3\mathbf{b}|=|3\mathbf{a}+\mathbf{b}|, |\mathbf{a}+2\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}+2\mathbf{b} \rangle = |2\mathbf{a}-\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, 2\mathbf{a}-\mathbf{b} \rangle$, 则 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 如图, 已知点 N 在边长为 2 的正八边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的边上, 点 M 在边 A_1A_2 上, 则 $\overrightarrow{A_1M} \cdot \overrightarrow{A_1N}$ 的取值范围是 ()



- A. $[-4-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ B. $[-4, 4+2\sqrt{2}]$
C. $[-2\sqrt{2}, 4+2\sqrt{2}]$ D. $[-2\sqrt{2}, 4]$

1. [2023·新课标I卷] 已知在 $\triangle ABC$ 中, $A+B=3C$,
 $2\sin(A-C)=\sin B$.

(1)求 $\sin A$;

(2)设 $AB=5$,求 AB 边上的高.

2. [2024·广东茂名一模] 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C
的对边分别是 a,b,c ,且 $b\sin(B+C)=a\sin\frac{A+C}{2}$.

(1)求角 B 的大小;

(2)若 D 是 AC 的中点,且 $BD=2$,求 $\triangle ABC$ 的面积
的最大值.

3. [2024·湖南衡阳模拟] 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C
的对边分别为 a,b,c ,已知 $a=b\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$.

(1)求角 B 的大小;

(2)过点 B 作 $BD\perp BA$,交 AC 于点 D ,且 $AD=2DC$,求角 C 的大小.

4. [2024·新课标I卷] 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C = \sqrt{2} \cos B, a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$.

(1)求 B ;

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$, 求 c .

5. [2024·江苏南通模拟] 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = 2, c^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\sqrt{3}S$, 其中 S 为 $\triangle ABC$ 的面积.

(1)求角 A 的大小;

(2)设 D 是 BC 的中点, 若 $AB \perp AD$, 求 AD 的长.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,

$$a \sin^2 \frac{B}{2} + b \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{3ab}{2(a+b+c)}.$$

(1)求角 C 的大小;

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\frac{a+b}{c}$ 的取值范围.



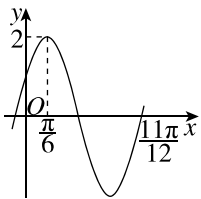
一、单项选择题

- [2024·吉林长春模拟] 已知两个向量 a, b 满足 $a \cdot b = |b| = 1, |a - b| = \sqrt{3}$, 则 $|a| =$ ()
 A. 1 B. $\sqrt{2}$
 C. $\sqrt{3}$ D. 2
- [2024·全国甲卷] 已知 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ ()
 A. $2\sqrt{3} + 1$ B. $2\sqrt{3} - 1$
 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $1 - \sqrt{3}$
- [2024·天津卷] 已知函数 $f(x) = \sin 3(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}]$ 上的最小值是 ()
 A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. 0 D. $\frac{3}{2}$
- [2024·湖南衡阳模拟] 已知 $\cos(\frac{\pi}{5} - \alpha) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin(\frac{11\pi}{10} + 2\alpha) =$ ()
 A. $\frac{7}{9}$ B. $-\frac{7}{9}$ C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$
- [2024·新课标I卷] 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, 曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ 的交点个数为 ()
 A. 3 B. 4
 C. 6 D. 8
- [2024·四川眉山三模] 已知向量 a, b, c 满足 $|a| = |b| = 1, |c| = \sqrt{3}$, 且 $a + b + c = 0$, 则 $\cos \langle a - c, b - c \rangle =$ ()
 A. $\frac{13}{14}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{14}$
 C. $-\frac{3\sqrt{3}}{14}$ D. $-\frac{13}{14}$
- [2024·江苏宿迁三模] 已知函数 $f(x) = \cos x + \cos(x - \frac{\pi}{3}) + 1$, 则下列结论正确的是 ()
 A. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增

- $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心
 - $f(x)$ 在 $[-\frac{2\pi}{3}, 0]$ 上的取值范围为 $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$
 - 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度, 再向下平移一个单位长度, 所得图象对应的函数解析式为 $y = \sqrt{3} \cos x$
- [2024·辽宁沈阳三模] 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x - \frac{1}{2} \sin(2\omega x - \frac{\pi}{2})$ ($\omega \in \mathbf{R}$, 且 $\omega > 0$), $x \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上恰有 3 个极大值点, 则 ω 的取值范围为 ()
 A. $[\frac{13}{6}, \frac{19}{6})$ B. $(\frac{13}{6}, \frac{19}{6}]$
 C. $[\frac{13}{12}, \frac{19}{12})$ D. $(\frac{13}{12}, \frac{19}{12}]$

二、多项选择题

- [2024·新课标II卷] 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$, 下列说法正确的有 ()
 A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点
 B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值
 C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期
 D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴
- [2024·广东江门三模] 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则下列结论正确的是 ()
 A. $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$
 B. 函数 $f(x)$ 在区间 $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}]$ ($k \in \mathbf{Z}$) 上单调递增
 C. 要想得到 $y = 2\cos 2x$ 的图象, 只需将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
 D. 函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{7\pi}{12}, \pi]$ 上的取值范围是 $[-2, 1]$



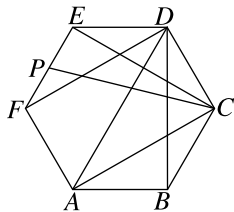
11. 如图,正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 1,点 P 是 $\triangle DEF$ 内部(包括边界)的动点,则 ()

A. $\vec{DE} = \vec{AF} - \frac{1}{2}\vec{AD}$

B. $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \frac{3}{4}$

C. 若 P 为 EF 的中点,则 \vec{CP} 在 \vec{EC} 上的投影向量为 $-\sqrt{3}\vec{EC}$

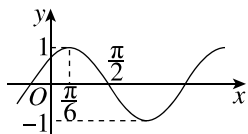
D. $|\vec{FE} + \vec{FP}|$ 的最大值为 $\sqrt{7}$



三、填空题

12. 已知非零向量 a, b 满足 $|a| = 2|b|$, $(a+b) \perp b$, 则向量 a 与 b 的夹角为_____.

13. [2024·湖南邵阳三模] 宋朝诗人王镒在《蜻蜓》中写到“轻绡剪翅约秋霜,点水低飞恋野塘”,描绘了蜻蜓点水的情形,蜻蜓点水会使平静的水面形成水波纹,截取其中一段水波纹,其形状可近似于用函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象(如图所示)来描述,则 $f(x) =$ _____.



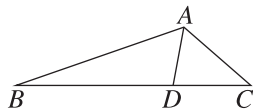
14. [2024·广东肇庆三模] 若函数 $f(x) = \sqrt{3}\cos \omega x - \sin \omega x + 1$ ($\omega > 0$) 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内存在最小值但无最大值,则 ω 的取值范围是_____.

四、解答题

15. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,点 D 为边 BC 上一点,且满足 $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC}$.

(1) 求证: $\angle BAC + \angle DAC = \pi$;

(2) 若 $AB = 2, AC = 1, BC = \sqrt{7}$, 求 AD 的长度.



16. [2024·山东菏泽三中模拟] 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \lambda \vec{AB}^2$.

(1) 若 $\lambda = 1$, 判断 $\triangle ABC$ 的形状;

(2) 若 $\lambda = \frac{1}{2}$, 求 $\tan(B-A)$ 的最大值.

11. [2024·银川三模] 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, S_1, S_2, S_4 成等比数列, $S_2 = 2a_1 + 2$, 当 $6a_n - S_n$ 取得最大值时, $n =$ _____.

12. [2024·湖南益阳二模] 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{a_n}$, 若 $b_n = \frac{1}{a_n - 2}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.

四、解答题

13. [2024·四川遂宁三模] 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_5 = 4a_3$.
 (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_m = 31$, 求 m 的值.

14. [2024·重庆九龙坡区质检] 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_5 = a_{11} = 20$, 数列 $\{b_n\}$ 是公比大于 1 的等比数列, 且 $b_3^2 = b_6, b_4 - b_2 = 12$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{S_n}{b_n}$, 求使 c_n 取得最大值时 n 的值.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1=2, (n-2)S_{n+1}+2a_{n+1}=nS_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

12. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=-\frac{3}{4}, 3(a_{n+1}+1)(a_n+1)=a_n-a_{n+1}$, 则 $a_n=_____$.

四、解答题

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 $S_n, a_2=2, S_9=45$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(n-1)\cdot 2^n+1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 在 a_k 与 a_{k+1} 之间插入 b_k 个 $2(k\in\mathbf{N}^*)$, 组成一个新数列 $\{d_n\}$, 求数列 $\{d_n\}$ 的前 2024 项和 T_{2024} .

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是公差为 $2d(d>0)$ 的等差数列, 偶数项是公比为 $q^2(q>0)$ 的等比数列, 且公差与公比相等, 其通项公式为 $a_n = \begin{cases} a_1+(n-1)d, n=2k+1, k\in\mathbf{N}, \\ a_1q^{n-1}, n=2k, k\in\mathbf{N}^*, \end{cases}$ 且 $a_1=1, a_1+2a_2=a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n=na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} . (附:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. [2024·江苏苏州模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,
 $a_{n+1}=a_n+2n$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)记 $b_n=(-1)^n(a_n+n-1)$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n-1$ 项和 S_{2n-1} .

2. [2023·全国甲卷] 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,
 已知 $a_2=1, 2S_n=na_n$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)求数列 $\left\{\frac{a_{n+1}}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

3. [2024·福建漳州模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $a_{n+1}-\frac{S_n}{n}=n+1$, a_4 为 a_2, a_8 的等比中项.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 T_n 为数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和,证明:

$$T_n \geq \frac{1}{8}.$$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1} = \begin{cases} a_n+1, n \text{ 为奇数,} \\ a_n+2, n \text{ 为偶数.} \end{cases}$
- (1) 记 $b_n = a_{2n}$, 写出 b_1, b_2 , 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和.

5. [2024 · 西安模拟] 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $4a_2, 2a_3, a_4$ 成等差数列, 且 $S_4 = 8a_2 - 2$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $b_n = \frac{a_n}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)}$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $\frac{1}{12} \leq T_n < \frac{1}{4}$.

6. [2024 · 郑州三模] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1=1, a_2=3, S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + 1) (n \geq 2)$.
- (1) 求 S_n ;
- (2) 若 $b_n = \frac{4n \cos(n+1)\pi}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 1012 项和 T_{1012} .